

# **Metoda Elementów Skończonych**

## **Całkowanie po elementach**

**Tomasz Stręk**

**Institute of Applied Mechanics, Poznan University of Technology**

**ul. Jana Pawła II 24, 60-965 Poznan, Poland**

**[www.strek.h2g.pl](http://www.strek.h2g.pl)**

DATE: 2020.03.02

Metoda numeryczna polegająca na przybliżonym obliczaniu całek oznaczonych. Określana również terminem kwadratura numeryczna, w szczególności w odniesieniu do całek jednowymiarowych.

Przybliżenie całki za pomocą odpowiedniej sumy ważonej wartości całkowanej funkcji w kilku punktach jest prostą metodą całkowania numerycznego. Dokładniejsze przybliżenie uzyskujemy dzieląc przedział całkowania na niewielkie fragmenty. Suma oszacowań całek w poszczególnych podprzedziałach jest ostatecznym wynikiem. Zazwyczaj dzieli się przedział na równe podprzedziały, istnieją też algorytmy potrafiące dostosowywać krok do szybkości zmienności funkcji.

Często stosowanym sposobem całkowania numerycznego jest formuła Gaussa-Legendre'a.



**Adrien Marie Legendre (1752-1833)** zajmował się między innymi funkcjami eliptycznymi, funkcjami sferycznymi (wielomiany Legendre'a), rachunkiem wariacyjnym (kryterium istnienia ekstremum całki Legendre'a), wyznaczaniem orbit komet, zagadnieniem liczb pierwszych. W 1806 r. odkrył równocześnie z Gaussem metodę najmniejszych kwadratów.

Polega to na zastąpieniu danej całki sumą iloczynów funkcji podcałkowej w odpowiednio dobranych punktach, o funkcjach wagi  $w_i$ , odpowiadających tym punktom:

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2, L_3) dL_1 dL_2 = \sum_{i=1}^n w_i f(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}),$$

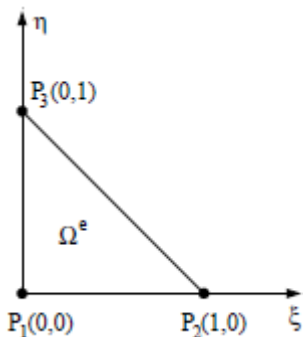
$n$  – liczba punktów Gaussa w danym trójkącie,

$L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}$ , współrzędne powierzchniowe

$L_1, L_2, L_3$  w  $i$ -tym punkcie Gaussa.


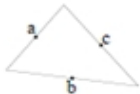

Funkcja wagi ma taką właściwość, że jeżeli funkcja podcałkowa  $f(L_1, L_2, L_3)$  jest tożsamościowo równa jedności w całym obszarze trójkąta, to wartość całki jest równa polu tego trójkąta.

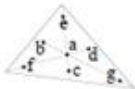
Zatem całkując w znormalizowanym trójkącie o polu równym  $\frac{1}{2}$ ,



to suma wag we wszystkich punktach całkowania wynosi  $\frac{1}{2}$ . Wynika to bezpośrednio z powyższej zależności, jeżeli za funkcję podcałkową  $f(L_1, L_2, L_3)$  podstawimy wartość 1. Widać to wyraźnie w ostatniej kolumnie poniżej tablicy.

### Całkowanie numeryczne dla elementów trójkątnych

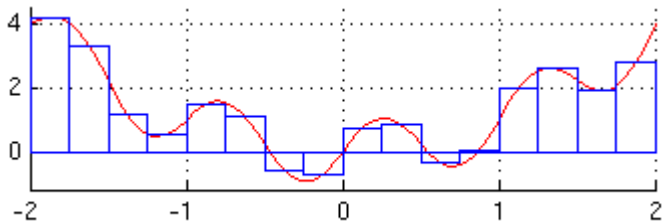
Rząd	Błąd	Punkty	Współrzędne powierzchniowe	Wagi $2 w_i$
 Liniowy	$R=O(h^2)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	1
 Kwadratowy	$R=O(h^3)$	a b c	$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{3}$
 Sześcienny	$R=O(h^4)$	a b c d e f g	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0$ $0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}$ 1, 0, 0 0, 1, 0 0, 0, 1	$\frac{27}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{8}{60}$ $\frac{3}{60}$ $\frac{3}{60}$ $\frac{3}{60}$

 Piątego stopnia	$R=O(h^6)$	a	$\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$	0.225
		b	$\alpha_1, \beta_1, \beta_1$	0.13239415278850619
		c	$\beta_1, \alpha_1, \beta_1$	0.13239415278850619
		d	$\beta_1, \beta_1, \alpha_1$	0.13239415278850619
		e	$\alpha_2, \beta_2, \beta_2$	0.12593918054482713
		f	$\beta_2, \alpha_2, \beta_2$	0.12593918054482713
		g	$\beta_2, \beta_2, \alpha_2$	0.12593918054482713

gdzie: wartości  $\alpha_1 = 0.05971587$ ,  $\beta_1 = 0.47014206$ ,  $\alpha_2 = 0.79742699$  i  $\beta_2 = 0.10128651$ .

## Metoda prostokątów.

Prawdopodobnie najprostszym wzorem jest metoda punktu środkowego:

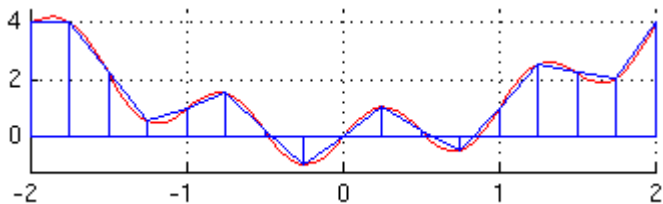


$$\int_x^{x+h} f(x)dx \approx hf\left(x + \frac{h}{2}\right)$$
 Jeśli funkcja  $f(x)$  zmienia się w niewielkim stopniu na przedziale  $(x, x+h)$ , reguła taka da dobre przybliżenie całki.



## Metoda trapezów

Polega na tym, że figurę ABCD zastępujemy figurą złożoną z trapezów wpisanych, tzn. krzywą aproksymujemy linią łamaną w nią wpisaną. Przedział całkowania dzielimy przy tym na równe części.



Podzielmy przedział  $[a, b]$  na  $n$  równych części o długości  $h = \frac{b-a}{n}$ .

W punktach podziału prowadzimy rzędne do przecięcia z krzywą  $y = f(x)$ . Otrzymane punkty łączymy odcinkami prostoliniowymi. Możemy wówczas traktować pole trapezu krzywoliniowego  $aABb$  jako równe w przybliżeniu polu figury utworzonej z trapezów  $P_i$  zbudowanych na rzędnych  $f(x_{x-1}), f(x_i)$  traktowanych jako podstawy, odcinka zawartego pomiędzy punktami  $x_i, x_{i-1}$  o długości  $h$  będącego wysokością i odcinka łączącego punkty o współrzędnych  $(x_{i-1}, f(x_{x-1})), (x_i, f(x_i))$ .

Pole trapezu  $P_i$  obliczamy ze znanego wzoru  $P_i = \frac{h}{2}(f(x_{x-1}) + f(x_i))$ .

Zatem przybliżone pole trapezu krzywoliniowego będzie sumą wszystkich trapezów  $P_i$  wyznaczonych przez podział  $n$ ;

$$P \approx \sum_{i=1}^n P_i = \frac{h}{2} ((f(a) + f(x_1)) + (f(x_1) + f(x_2)) + \dots + (f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})) + (f(x_{n-1}) + f(b)))$$

Zatem

$$P \approx h \left( \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right)$$

Ogólny błąd bezwzględny można zapisać

$$\alpha = \frac{(b-a)^3}{12n^2} M, \text{ gdzie } M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$$

Dla uzyskania żądanej dokładności  $\varepsilon > 0$  w praktyce postępujemy następująco:

Dla podziału przedziału  $n$  obliczamy  $S_n = \sum_{i=1}^n P_i$ , a następnie zagęszczamy podział przedziału dwukrotnie i obliczamy  $S_{2n}$ . Jeżeli jest spełniony warunek  $|S_n - S_{2n}| < \varepsilon$  przyjmujemy, że pole  $P$  trapezu krzywoliniowego jest równe  $S_n$  z dokładnością do  $\varepsilon$ . W przeciwnym wypadku podział zagęszczamy.

```
function [p]=trapez(a,b,eps,n,funkcja)
% program oblicza wartość całki oznaczonej metoda trapezów
% [a,b] przedział całkowania
% eps dokładność obliczeń
% n wstępny podział przedziału
% funkcja(x) - funkcja podcałkowa
if n<2
n=2;
end
f=inline(funkcja);
pp=0;
p=1;
while abs(p-pp)>eps
pp=p;
dx=(b-a)/n;
p=(f(a)+f(b))/2;
x=a;
for i=1:n-1
x=x+dx;
p=p+f(x);
end
p=dx*p;
n=2*n;
end
```

## Metoda Simpsona

Wymaga podzielenia przedziału całkowania na parzystą liczbę podprzedziałów, tzn.

$$h = \frac{b-a}{2n} \text{ dla uproszczenia oznaczamy: } x_i = a + ih \text{ oraz } f_i = f(x_i)$$

Wykonując całkowanie wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a z 3 kolejnych punktów otrzymujemy wzór Simpsona:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_i + 4f_{i+1} + f_{i+2}],$$

dla całego przedziału (a,b) otrzymujemy:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f_0 + 4(f_1 + f_3 + \dots + f_{2n-1}) + 2(f_2 + f_4 + \dots + f_{2n-2} + f_{2n})]$$